1. **Integral dalam Ruang Dimensi Tiga**
2. **Persamaan Diferensial Biasa**

**TUJUAN PEMBELAJARAN**

Agar pembaca memahami apa yang disebut dengan Integral Lipat Dua atas Persegipanjang dan bukan Persegipanjang, selanjutnya dapat memahami penggunaan Integral Lipat Dua untuk menghitung Volume Bidang Empat, Massa suatu Benda dan Pusat Massa suatu Benda

**OUTCOME PEMBELAJARAN**

Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami dan mampu menyelesaikan Integral Lipat Dua atas Persegipanjang dan Bukan Persegipanjang
2. Memahami dan mampu menggunakan Integral Lipat Dua untuk menentukan Volume Bidang Empat, Massa Suatu Benda, Pusat massa suatu benda
   1. **Integral Lipat Dua atas Persegipanjang**

Adalah Henry Lebesque yang menyumbang tentang pengintegralan dalam dimensi satu dan dimensi n yang dikenal dengan ***Integral Lebesque*** yaitu yang memberikan sumbangan pada integral Riemann.

Integral Riemann untuk fungsi satu peubah yang telah kita pelajari adalah dalam interval  dibagi menjadi n buah partisi  yang panjangnya , dimana , jika kita mengambil suatu titik dari sub interval ke-, maka menurut Riemann didefinisikan :



Diketahuisuatu persegipanjang dengan sisi-sisi sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat, misalkan  jika dibuat partisi  dari  dengan cara membuat garis-garis yang sejajar dengan sumbu x dan sumbu y seperti Gambar 6.1.

Gambar 5.1. Pembagian Daerah R

c

a

b

d



•



Terlihat daerah  dengan batas  dibagi menjadi n buah partisi yang berbentuk persegipanjang kecil yaitu  dimana , jika kita mengambil satu buah partisi yaituyang panjang sisinya  dan , maka luas partisi  adalah , jika didalam kita mengambil sebuah titik yaitu  kemudian kita substitusikan kedalam fungsinya yaitu , maka diperoleh tinggi satu buah partisi yaitu , sehingga volume satu buah partisi diperoleh  karena semuanya terdapat buah partisi, maka menurut penjumlahan Riemann diperoleh :



Seperti pada Gambar 5.2

Gambar 5.2. Volume satu partisi

c

a

b

d



•



**Definisi Integral Lipat Dua :**

**Andaikan  suatu fungsi dua variable bebas yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup , jika :**

****

**Ada, kita katakana  dapat diintegralkan pada , lebih lanjut integral yang dituliskan  yang disebut Integral Lipat Dua pada  diberikan :**

****

Seperti halnya integral lipat satu, yaitu jika, maka  menyatakan luas daerah dibawah kurva  dalam interval , dalam integral lipat dua juga menyatakan hal yang sama, jika  maka **** menyatakan Volume benda pejal di bawah permukaan  dan di atas persegi panjang **.**

**Sifat-Sifat Integral Lipat Dua :**

1. Integral lipat dua adalah linier

a. 

b. 

1. Integral lipat dua adalah aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis

a. 

1. Sifat pembandingan berlaku, jika  untuk semua di ****, maka

a. 

4. jika  pada****, maka integral lipat dua merupakan luas daerah ****

a. 

**Contoh 5.1 :**

Andaikan  berupa fungsi tangga yaitu :

 

Hitung  dengan 

**Penyelesaian 5.1 :**

Jika fungsi  kita gambar, maka seperti Gambar 5.3

3

1

2

3

Y

X

Z

2

1

3

Gambar 5.3. Fungsi Tangga



Diketahui ada tiga daerah persegi panjang, yaitu :

♦. 

♦. 

♦. 











**Contoh 5.2 :**

Tentukan  jika diketahui  dimana



**Penyelesaian 5.2 :**

Jika daerah  kita bagi menjadi delapan buah bujur sangkar yang sama, dengan sebuah titik tengah  yaitu :

1. , dengan titik tengah
2. , dengan titik tengah
3. , dengan titik tengah
4. , dengan titik tengah
5. , dengan titik tengah
6. , dengan titik tengah
7. , dengan titik tengah
8. , dengan titik tengah

Jika ke delapan daerah bujur sangkar kita gambar, maka seperti Gambar 5.4

(4,0,2) •

• (1)

• (2)

• (3)

• (4)

• (5)

• (6)

• (7)

• (8)

• (4,8,6)

• (0,8,8)

(0,0,4) •

Z

X

Y

Gambar 5.4. Pembagian Delapan Bujursangkar

Untuk melakukan penjumlahan Riemann, maka titik tengah kita substitusikan ke dalam fungsi  untuk memperoleh tinggi masing-masing balok yang alasnya berbentuk bujur sangkar, diperoelh :

1. ⇒

2. ⇒

3. ⇒

4. ⇒

5. ⇒

6. ⇒

7. ⇒

8. ⇒

Sehingga menurut Sifat penjumlahan diperoleh :

















Karena 

Maka integral di atas dapat ditulis menjadi :





* + 1. **Soal-Soal Latihan**

1. Diketahui  hitunglah dengan fungsi  sebagai berikut :

1.  ; 

2.  ; 

3.  , 

4.  , 

1. Diketahui  dan  adalah partisi dari menjadi enam bujursangkar yang sama oleh garis,  dan , hitung nilai pendekatan dari dengan menghitung penjumlahan Riemann dengan menganggap titik  sebagai titik tengah bujur sangkar, jika sebagai berikut :

1. 

2. 

3. 

4. 

* 1. **Integral Lipat**

Untuk menghitung masalahdengan berupa persegipanjang yaitu :



Jika kita asumsikan bahwa  pada  sehingga kita dapat menafsirkan integral lipat dua sebagai Volume dari benda pejal di bawah permukaan, seperti pada Gambar 6.3

a

b

X

Y

d

c

Z



R

Gambar 5.5. Volume Benda Pejal di Bawah Permukaan

Volume benda pejal di bawah permukaan didefinisikan sebagai berikut :





Dengan kata lain bahwa volume benda pejal seperti Gambar 5.5 dapat ditentukan dengan integral lipat dua yaitu :



Atau dapat kita tulis :



**Contoh 5.3 :**

Tentukan integral berikut 

**Penyelesaian 5.3 :**

Pada integral di atas, cara pengintegralan yang pertama (di dalam kurung) dengan menganggap variable  sebagai konstanta, sehingga integral lipat di atas dapat diselesaikan sebagai berikut :

 

















Sehingga 

**Contoh 5.4 :**

Tentukan Integral berikut 

**Penyelesaian 5.4 :**

Pada integral di atas, cara pengintegralan yang pertama (di dalam kurung) dengan menganggap variable  sebagai konstanta, sehingga integral lipat di atas dapat diselesaikan sebagai berikut

 

















Sehingga 

**Contoh 5.5 :**

Tentukan Volume dari benda pejal yang dibatasi oleh  dan di bawah oleh persegipanjang 

**Penyelesaian 5.5 :**

Volume benda pejal tersebut adalah :





















Sehingga Volume benda yang dibatasi oleh  dan di bawah persegipanjang  adalah 

* + 1. **Soal-Soal Latihan**

**A. Hitung Integral di bawah ini :**

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

9.  10. 

**B. Hitung Integral Lipat Dua yang ditunjukan atas R di bawah ini**

1. , 

2. , 

3. , 

4. , 

5. , 

**C**. **Tentukan Volume benda pejal dibawah bidang :**

1.  atas 

2.  atas 

* 1. **Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegipanjang**

Misalkan ada suatu himpunan tertutup dan terbatas di bidang seperti Gambar 5.6 berikut :



Gambar 5.6. Himpunan Tertutup S

Himpunan tertutupdikelilingi oleh persegi panjang  dengan sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat seperti Gambar 5.7



Gambar 5.7. Himpunan R atas S

Andaikan  terdefinisi pada dan didefinisikan  pada bagian  diluar  kita katakan  dapat diintegralkan pada  jika ia dapat diintegralkan pada  dan berlaku :



Misalkan terdapat himpunan  sederhana dimana  dan  adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada interval  yang didefinisikan sebagai berikut :



Jika kita gambar himpunan  tersebut seperti Gambar 5.8

Gambar 5.8. Himpunan S dibatasi oleh y sederhana



b

X

Y

a

Jika kita ingin menghitung integral lipat dua dari suatu fungsi atau suatu himpunan  yang  sederhana, maka kita lakukan melingkungi  dalam suatu persegi panjang  dan membuat  diluar seperti Gambar 5.9

Gambar 5.9. Persegipanjang R melingkungi S



b

X

Y

a



d

c



Dengan demikian integral lipat dua dapat didefinisikan sebagai berikut :



Secara singkat integral lipat dua untuk himpunan adalah :



**Contoh 5.6 :**

Hitung integral lipat dua berikut : 

**Penyelesaian 5.6 :**















**Contoh 5.7 :**

Gunakan integral lipat dua untuk menentukan volume bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang 

**Penyelesaian 5.7 :**

Daerah segitiga di bidang yang membentuk alas bidang empat sebagai, kita akan mencari Volume benda pejal di bawah permukaan  dan di atas daerah , bidang yang diberikan memotong bidang  pada garis  dan garis , jika kita gambar maka bidang empat tersebut seperti pada Gambar 5.10



3

Y

Z

X

2

4



Gambar 5.10. Volume Benda Pejal di Atas Daerah S

Diketahui batasmeliputi batasyaitu , batas  adalah  sedangkan fungsinya adalah  sehingga volume benda pejal tersebut adalah :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

**Contoh 5.8 :**

Hitung Integral Lipat dua yang diberikan dengan mengubahnya ke suatu integral lipat  adalah daerah antara dan 

**Penyelesaian 5.8 :**

Untuk menentukan daerahdidapat  diperoleh batas nilai , yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh nilai dan , sehingga himpunan daerah adalah

 sehingga integralnya sebagai berikut :

⇒



















**Contoh 5.9 :**

Tentukan Volume benda pejal yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang yang mempunyai persamaan 

**Penyelesaian 5.8 :**

Diketahui batas  meliputi batas  yaitu , yang didapat jika  dan , sedangkan batas  adalah  yang diperoleh jika , sedangkan fungsinya adalah  jika kita gambar pada sistem koordinat, maka benda pejal tersebut seperti pada Gambar 5.11 dan volumenya sebagai berikut :



6

Y

Z

X

2

3

Gambar 5.11. Benda Pejal di Atas Daerah S

⇒ 















⇒ 

* + 1. **Soal-Soal Latihan**

1. **Hitung Integral Lipat Berikut Ini**

1.  4. 

2.  5. 

3.  6. 

1. **Hitung Integral Lipat Dua yang diberikan berikut ini**

1. , adalah daerah yang dibatasi oleh  dan 

2. , adalah daerah segitiga dengan titik-titikdan 

3. , adalah daerah yang dibatasi oleh  dan 

4. , adalah daerah yang dibatasi oleh  dan 

5. , adalah daerah segitiga dengan titik-titikdan 

1. **Tentukan Volume Benda Pejal dengan Integral Lipat Dua yang dibatasi oleh :**
   * + 1. Bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang 
       2. Bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang 
       3. Bidang empat yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang 
   1. **Penerapan Integral Lipat Dua**

Penerapan Integral Lipat dua yang paling jelas adalah untuk menentukan volume benda pejal seperti yang telah dibahas, penerapan lainnya adalah untuk menentukan massa suatu benda yang tak homogeny serta letak pusat massa sebuah benda yang tidak homogen.

Benda yang tak homogen adalah benda yang mempunyai kerapanya berubah-ubah atau tidak konstan, dimana kerapatan di setiap titik berbeda, artinya kerapatan di titik A berbeda dengan kerapatan di titik B, secara matematis maka kerapatan yang berubah-ubah itu dirumuskan sebagai fungsi yang mempunyai variable

**5.4.1. Massa**

Andaikan suatu benda yang mencakup daerah di bidang  dan andaikan kerapatan (massa per satuan luas) di  dinyatakan oleh  seperti pada Gambar 5.12

Y

Z

S

Gambar 5.12. Benda Tak Homogen

Untuk mempermudah, maka benda tak homogen dalam Gambar 5.12 dibagi-bagi atau dibuat partisi-partisi berupa persegipanjang kecil-kecil misalnya  seperti pada Gambar 5.13

Gambar 5.13. Partisi atas Daerah S

Y

Z

S



•



Kemudian kita ambil satu titik yaitu  yang terletak di dalam salah satu partisi yaitu partisi , maka massa dari  adalah  yaitu kerapatan di titik  dalam partisi  dikali luas partisi , sehingga massa total benda tersebut didekati oleh , dimana massa sebenarnya,  diperoleh dengan mengambil limit dari rumus di atas untuk norma partisi mendekati nol, sehingga menurut teorema diperoleh integral lipat dua yaitu :



**Contoh 5.10 :**

Sebuah benda tak homogen (lamina) mempunyai kerapatan, lamina tersebut dibatasi oleh sumbu , garis  dan garis serta kurva , tentukan massa totalnya.

**Penyelesaian 5.10 :**

Dari soal di atas, berarti lamina tersebut di batasi oleh batas dari  sampai , serta batas dari  sampai sehingga massa total lamina tersebut adalah :















**Contoh 5.11 :**

Sebuah benda tak homogen (lamina) mempunyai kerapatan, lamina tersebut dibatasi oleh sumbu, garis  dan garis serta kurva , tentukan massa totalnya.

**Penyelesaian 5.11 :**

Dari soal di atas, berarti lamina tersebut di batasi oleh batas dari  sampai , serta batas dari  sampai sehingga massa total lamina tersebut adalah :















**5.4.2. Pusat Massa**

Titik pusat massa yaitu suatu titik yang menyebabkan benda dalam keadaan setimbang, titik pusat massa ini dituliskan sebagai koordinat titik yaitu :  dari pusat massa, koordinat ini dapat ditentukan oleh rumus berikut



Secara rinci jika suatu benda tak homogen (lamina) yang dibatasi oleh  dan  dalam interval  dan tingkat kerapatan , maka koordinat titik pusat massa  dapat ditentukan oleh :

Jika  , maka  sebagai batas atas dan  sebagai batas bawah, maka koordinat titik pusat massaditentukan oleh rumus :

 

Jika , maka  sebagai batas bawah dan  sebagai batas atas, maka koordinat titik pusat massaditentukan oleh rumus :

 

**Contoh 5.12 :**

Sebuah benda tak homogen (lamina) mempunyai kerapatan, lamina tersebut dibatasi oleh sumbu, garis  dan garis serta kurva , koordinat titik pusat massa.

**Penyelesaian 5.12 :**

Dari soal di atas, berarti lamina tersebut di batasi oleh batas dari  sampai , serta batas dari  sampai sehingga koordinat titik pusat massa adalah :

 













 













Sehingga diperoleh koordinat titik pusat massa benda tidak homogen tersebut adalah



* + 1. **Soal-Soal Latihan**

**Tentukan massa dan titik pusat massa dari lamina yang dibatasi oleh kurva dan kerapatan yang diberikan berikut ini**

1. , , ,  dengan tingkat kerapatan 

2. , , ,  dengan kerapatan 

3. , , ,  dengan kerapatan 

4. ,  dengan tingkat kerapatan 

5. Bujursangkar dengan titik sudut , dan dengan kerapatan 

6. Segitiga dengan titik sudutnya  dengan tingkat kerapatan 

**TUJUAN PEMBELAJARAN**

Agar pembaca memahami apa yang disebut dengan Persamaan diferensial Biasa, Apa yang disebut dengan Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa termasuk Jenis-Jenis Penyelesaian, dapat memahami Persamaan Diferensial Linier Koefisien Konstan Homogen dan Tak Homogen, Peramaan Linier Koefisien Variabel Tak Homogen Orde 1 serta dapat menentukan sebuah Persamaan Diferensial Biasa dari sebuah Primitif yang diketahui.

**OUTCOME PEMBELAJARAN**

Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa dapat :

1. Memahami dan mampu menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa dalam bentuk Penyelesian Umum (PU), Penyelesaian Khusus (PK) dan Penyelesaian Partikulir (PP)
2. Memahami dan mampu menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier Koefisien Konstan Homogen Orde 1 dan Orde 2 dengan baik
3. Memahami dan mampu menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier Konstan Tak Homogen Orde 1 dan Orde 2 dengan baik
4. Memahami dan mampu menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier Koefisien Variabel Tak Homogen Orde 1
5. Memahami dan mampu memperoleh Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dari sebuah primitif yang diketahui
   1. **Persamaan Diferensial**

Definisi :

Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang di dalamnya mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui

Secara umum suatu persamaan diferensial dapat dituliskan sebagai berikut :

 dengan  merupakan turunan ke- dari fungsi  terhadap variable 

Jika  merupakan turunan dari fungsi  yang mempunyai satu variable bebas misalkan, maka  disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Ada dua jenis persamaan diferensial, yaitu :

1. Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Jika turunan fungsi yang terkandung dalam persamaan diferensial berasal dari fungsi yang mempunyai satu buah variable bebas, maka persamaan diferensial yang terbentuk disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

**Contoh 6.1 :**

a. 

b. 

c. 

d. 

2. Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

Jika turunan fungsi yang terkandung dalam persamaan diferensial berasal dari fungsi yang mempunyai lebih dari satu buah variable bebas, maka persamaan diferensial yang terbentuk disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

**Contoh 6.2 :**

a. 

b. 

* 1. **Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa (PDB)**

Misalkan terdapat sebuah persamaan diferensial biasa yaitu , jika terdapat sebuah fungsi sembarang yaitu dimana fungsi tersebut mempunyai turunan pertamannya adalah , jika  kita substitusikan ke dalam persamaan diferensial yang diketahui yaitu  akan diperoleh  atau  atau dengan kata lain memenuhi persamaan diferensial  maka fungsi  disebut Penyelesaian dari Persamaan Diferensial Biasa .

Untuk menentukan penyelesaian suatu PDB ada beberapa hal yang perlu kita ketahui antara lain :

1. Orde Suatu PDB

2. Syarat Awal suatu PDB

3. Jenis Penyelesaian PDB

4. Metode Penyelesaian PDB

* + 1. **Orde Suatu Persamaan Diferensial Biasa (PDB)**

Suatu Persamaan Diferensial Biasa dikatakan orde n jika dalam persamaan diferensial biasa tersebut mengandung turunan tertingginya adalah turunan ke n, misalnya :

 PDB tersebut mengandung turunan tertingginya adalah turunan ke satu yaitu , karena itu PDB  dikatakan ber orde 1

 PDB tersebut mengandung turunan ke dua yaitu, sehingga PDB tersebut dikatakan mengandung turunan tertingginya adalah turunan ke dua yaitu, sehingga PDB dikatakan ber orde 2

 PDB tersebut mengandung turunan ke dua dan turunan ke satu yaitudan, sehingga PDB tersebut dikatakan mengandung turunan tertingginya adalah turunan ke dua yaitu , sehingga PDB dikatakan ber orde 2

 PDB Orde 1

 PDB Orde 2

* + 1. **Jenis Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa (PDB)**

Telah disebutkan bahwa jika diketahui persamaan diferensial biasa sembarang misalnya  maka  dikatakan sebagai penyelesaian dari PDB 

Ada tiga jenis penyelesaian PDB, yaitu :

1. ***Penyelesaian Umum (PU)***

Penyelesaian Umum (PU) adalah penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa yang masih mengandung konstanta  secara lengkap jumlahnya

Jika PDB yang diketahui ber orde n, maka di dalam PU akan terdapat n buah konstanta  yang *esensial* dan tidak boleh digabung

**Contoh 6.3 :**

Diketahui PDB 

**Penyelesaian 6.3 :**

Karena PDB  ber orde 1, maka dalam PU yang terbentuk hanya ada 1 buah konstanta 

**Contoh 6.4 :**

Diketahui PDB 

**Penyelesaian 6.4 :**

Karena PDB ber orde 2, maka dalam PU yang terbentuk akan ada 2 buah konstanta  yaitu  dan  dimana  dan  merupakan konstanta  yang *esensial* dan tidak boleh digabung

1. ***Penyelesaian Khusus (PK)***

Penyelesaian Khusus (PK) adalah penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa yang sudah tidak lagi mengandung konstanta , hal ini dikarenakan konstanta  sudah mempunyai nilai.

**Contoh 6.5 :**

Misalkan diketahui PDB 

**Penyelesaian 6.5 :**

PDB  dikatakan mempunyai penyelesaian dimana PDB  berorde 1 sehingga penyelesaian disebut Penyelesaian Umum (PU) karena jumlah konstanta  hanya 1 sesuai dengan ordenya, jika nilai konstanta  bernilai 5 atau , maka PU  akan menjeadi , penyelesaian  inilah yang disebut Penyelesaian Khusus (PK)

**Contoh 6.6 :**

Misalnya ada PDB orde 2 yaitu 

**Penyelesaian 6.6 :**

PDB  adalah PDB orde 2, maka dalam Penyelesaian Umum (PU) akan mempunyai 2 buah konstanta  yaitu 

Jika nilai konstanta  dan  adalah masing-masing 2 dan 5 atau  dan  maka penyelesaian umum tersebut akan berubah menjadi  yang disebut Penyelesaian Khusus (PK)

1. ***Penyelesaian Partikulir (PP)***

Penyelesaian Partikulir (PP) adalah penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa yang masih mengandung konstanta , tetapi jumlahnya sudah tidak lengkap, hal ini dikarenakan beberapa konstanta  sudah mempunyai nilai dan beberapa konstanta lainya masih tetap

Penyelesaian Partikulir (PP) hanya ada pada PDB orde 2 atau lebih.

**Contoh 6.7 :**

Misalnya ada PDB orde 2 yaitu 

**Penyelesaian 6.7 :**

PDB  adalah PDB orde 2, maka dalam Penyelesaian Umum (PU) akan mempunyai 2 buah konstanta  yaitu 

Jika nilai konstanta  adalah 3 dan  belum diketahui atau  dan  tetap , maka penyelesaian umum tersebut akan berubah menjadi  yang disebut Penyelesaian Partikulir (PP)

**Contoh 6.8 :**

Misalnya ada PDB orde 2 yaitu 

**Penyelesaian 6.8 :**

PDB adalah PDB orde 2, maka dalam Penyelesaian Umum (PU) akan mempunyai 2 buah konstanta  yaitu 

Jika nilai konstanta  adalah 2 dan  belum diketahui atau  dan  tetap , maka penyelesaian umum tersebut akan berubah menjadi  yang disebut Penyelesaian Partikulir (PP)

* + 1. **Syarat Awal**

Jika diketahui suatu PDB kemudian kita menentukan penyelesaiannya, maka penyelesaian yang pertama kali kita peroleh adalah Penyelesaian Umum (PU), untuk dapat menentukan Penyelesaian Khusus (PK) ataupun Penyelesaian Partikulir (PP) tergantung pada ada atau tidak adanya syarat awal, jika PDB yang diketahui terdapat syarat awal, maka PU, PK dan PP dapat kita tentukan, tetapi jika syarat awal tidak diketahui, maka PK dan PP juga tidak dapat kita tentukan.

Bentuk umum syarat awal adalah :

♦.  ⇒ artinya jika  maka 

 ⇒ artinya jika  maka 

 ⇒ artinya jika  maka 

♦.  ⇒ artinya jika  maka 

 ⇒ artinya jika  maka 

 ⇒ artinya jika  maka 

**Contoh 6.9 :**

Misalkan diketahui PDB , syarat awal 

**Penyelesaian 6.9 :**

PDB  mempunyai penyelesaian umum (PU) , syarat awal mempunyai arti maka , jika  dan  disubstitusikan ke dalam PU yaitu , maka akan diperoleh :

⇒  , ⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jika  disubtitusikan ke PU  diperoleh Penyelesaian Khusus (PK) yaitu .

* + 1. **Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa (PDB)**

Untuk menyelesaiakan Persamaan Diferensial Biasa atau untuk memperoleh Penyelesaian Umum (PU) ada dua metode, yaitu :

1. Metode Integral Tak Tentu

2. Metode Operator D

* + - 1. ***Metode Integral Tak Tentu***

Jika diketahui Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde 1 yaitu maka proses penyelesaian PDB dengan metode integral sebagai berikut :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  ⇒  ini disebut PU

Jika diketahui Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde 2 yaitu maka proses penyelesaian PDB dengan metode integral sebagai berikut :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

 adalah PU

**Contoh 6.10 :**

Misalkan diketahui PDB , syarat awal , tentukan PU dan PK dari PDB tersebut

**Penyelesaian 6.10 :**

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  ini adalah PU

Syarat awal  dimasukan ke PU yaitu :  sehingga diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

 dimasukan ke PU yaitu  diperoleh PK yaitu Jadi secara rinci PDB di atas mempunyai :

PU :  dan PK : 

**Contoh 6.11 :**

Misalkan diketahui PDB , syarat awal  dan  tentukan PU, PP dan PK dari PDB tersebut

**Penyelesaian 6.11 :**

Diketahui PDB , maka :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi diperoleh PU nya adalah :



♦. Syarat awal dimasukan ke  diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

♦.  dimasukan ke PU yaitu  diperoleh PP yaitu 

♦. Syarat awal  dimasukan ke  diperoleh nilai  yaitu :

⇒   

 

 

 

Jika  dimasukan ke PP yaitu  akan diperoleh PK yaitu 

***2. Metode Operator D***

Operator D digunakan untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yang jika diselesaikan dengan metode Integral Tak Tentu mengalami kesulitan.

Yang dimaksud dengan Operator D adalah sebagai berikut :

♦. Jika ada maka operator D-nya adalah

♦. Jika ada maka operator D-nya adalah

♦. Jika ada maka operator D-nya adalah

♦. Dan seterusnya

♦. Jika ada maka dalam PDB akan tetap

Penggunaan metode Operator D dalam pembahasan ini dibatasi untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa yang mempunyai bentuk umum seperti berikut :

♦. 

Contoh :

1. 

2. 

3. 

♦. 

Contoh :

1. 

2. 

♦. 

Contoh :

1. 

2. 

♦. 

Contoh :

1. 

2. 

* 1. **Persamaan Diferensial Linier Koefisien Konstan Homogen**

Persamaan Diferensial Linier Koefisien Konstan Homogen mempunyai bentuk umum adalah  dan , yang dimaksud dengan koefisien konstan adalah nilai  dan  adalah konstan bukan variable, sedangkan yang dimaksud dengan homogen dikarenakan ruas kanan sama dengan nol

* + 1. **Persamaan Diferensial Linier Orde 1**

Persamaan Diferensial Linier Koefisien Konstan Homogen Orde 1 secara umum mempunyai bentuk umum adalah :



Jika kita selesaikan dengan metode integral tak tentu diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  karena  merupakan konstanta semarang, maka dapat kita wakilkan dengan konstanta sembarang  sehingga penyelesaian PDB diatas adalah 

Sehingga PDB Linier Homogen Orde 1  mempunyai rumus Penyelesaian Umum (PU) adalah 

Jika diselesaikan dengan metode Operator D akan diperoleh sebagai berikut :

⇒ 

⇒  ⇒  diperoleh persamaan karakteristik yaitu sehingga didapat akar karakteristik yaitu , maka PDB Linier Homogen Orde 1 itu mempunyai Penyelesaian Umum (PU)  dengan  merupakan akar karakteristik.

Secara umum PDB Linier Homogen Orde 1



PU-nya

Dengan  merupakan akar karakteristik.

**Contoh 6.12 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Homogen Orde 1  dengan syarat awal  tentukan PU dan PK

**Penyelesaian 6.12 :**

Diketahui PDB Linier Orde 1 , maka dengan menggunakan operator D kita dapat menentukan akar karakteriknya, yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh akar karakteristik 

Sehingga PU nya : 

Syarat awal  jika dimasukan ke PU akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi diperoleh PU nya 

**Contoh 6.13 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Homogen Orde 1  dengan syarat awal  tentukan PU dan PK

**Penyelesaian 6.13 :**

Diketahui PDB Linier Orde 1 , maka dengan menggunakan operator D kita dapat menentukan akar karakteriknya, yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh akar karakteristik 

Sehingga PU nya : 

Syarat awal  jika dimasukan ke PU akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi diperoleh PU nya 

* + 1. **Persamaan Diferensial Linier Orde 2**

Persamaan Diferensial Linier Koefisien Konstan Homogen Orde 2 secara umum mempunyai bentuk umum adalah :



Bentuk ini sangat sulit jika diselesaikan dengan metode integral tak tentu, oleh karena itu kita selesaikan dengan metode Operator D, yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  disebut persamaan karakteristik

Karena persamaan karakteristik merupakan persamaan kuadrat, maka dengan difaktorkan atau dengan rumus abc diperoleh akar karakteristik yaitu  dan  yaitu :

 dan 

Sehingga PDB Linier Homogen Orde 2



Mempunyai PU berbentuk :



**Contoh 6.14 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Homogen Orde 2  dengan syarat awal  dan  tentukan PU , PP dan PK

**Penyelesaian 6.14 :**

Diketahui PDB Linier Orde 2 , maka dengan menggunakan operator D kita dapat menentukan akar karakteriknya, yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh dan  sehingga diperoleh Penyelesaian Umum (PU) adalah 

Untuk memperoleh PP dan PK, maka kita masukan syarat awal ke PU dan turunan PU, diperoleh :

 ⇒  ⇒  ⇒  .…….pers (1)

 ⇒  ⇒ 

⇒  ……..pers(2)

Dari pers(1) dan pers(2) dengan eliminasi diperoleh :





 diperoleh nilai 

Jika  kita masukan ke PU  akan diperoleh PP yaitu 

Dan jika  kita masukan ke pers(1)  diperoleh  atau  dan jika  kita masukan ke PP akan diperoleh PK yaitu 

**Contoh 6.15 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Homogen Orde 2  dengan syarat awal  dan  tentukan PU , PP dan PK

**Penyelesaian 6.15 :**

Diketahui PDB Linier Orde 2 , maka dengan menggunakan operator D kita dapat menentukan akar karakteriknya, yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh dan  sehingga diperoleh Penyelesaian Umum (PU) adalah 

Untuk memperoleh PP dan PK, maka kita masukan syarat awal ke PU dan turunan PU, diperoleh :

 ⇒  ⇒ 

⇒  ……….pers (1)

 ⇒  ⇒ 

⇒ ………..pers(2)

Dari pers(2)  diperoleh , jika  dimasukan ke PU yaitu , maka akan diperoleh PP yaitu 

Jika  kita masukan ke pers(1)  diperoleh  atau  dan jika  kita masukan ke PP akan diperoleh PK yaitu 

**Contoh 6.16 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Homogen Orde 2  dengan syarat awal  dan  tentukan PU , PP dan PK

**Penyelesaian 6.16 :**

Diketahui PDB Linier Orde 2 , maka dengan menggunakan operator D kita dapat menentukan akar karakteriknya, yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh dan  , karena , maka diperoleh Penyelesaian Umum (PU) adalah 

Untuk memperoleh PP dan PK, maka kita masukan syarat awal ke PU dan turunan PU, diperoleh :

 ⇒  ⇒ 

⇒  ……….pers (1)

 ⇒ 

⇒ 

⇒  ………..pers(2

Dari pers(1) diperoleh, jika  dimasukan ke PU yaitu , maka akan diperoleh PP yaitu 

Jika  kita masukan ke pers(2)  diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

jika  kita masukan ke PP  akan diperoleh PK yaitu 

**Contoh 6.17 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Homogen Orde 2  dengan syarat awal  dan  tentukan PU , PP dan PK

**Penyelesaian 6.17 :**

Diketahui PDB Linier Orde 2 , maka dengan menggunakan operator D kita dapat menentukan akar karakteriknya, yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh dan  , karena , maka diperoleh Penyelesaian Umum (PU) adalah 

Untuk memperoleh PP dan PK, maka kita masukan syarat awal ke PU dan turunan PU, diperoleh :

 ⇒  ⇒ 

⇒  ……….pers (1)

 ⇒ 

⇒ 

⇒  ………..pers(2)

Dari pers(1) diperoleh , jika  dimasukan ke PU yaitu , maka akan diperoleh PP yaitu 

Jika  kita masukan ke pers(2)  diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒  ⇒ 

jika  kita masukan ke PP  akan diperoleh PK yaitu 

* + 1. **Soal Soal Latihan**

Tentukan PU, PP dan PK dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB) berikut ini

1. , syarat awal 

2. , syarat awal 

3. , syarat awal 

4. , syarat awal 

5. , syarat awal 

6. , syarat awal  dan 

7. , syarat awal  dan 

8. , syarat awal  dan 

9. , syarat awal  dan 

10. , syarat awal  dan 

11. , syarat awal  dan 

12. , syarat awal  dan 

13. , syarat awal  dan 

14. , syarat awal  dan 

15. , syarat awal  dan 

* 1. **Persamaan Diferensial Linier Koefisien Konstan Tak Homogen**

Persamaan Diferensial Linier Koefisien Konstan Tak Homogen pada prinsipnya sama dengan PDB Linier Koefisien Konstan Homogen, hanya saja untuk memperoleh Penyelesaian Umum (PU) ada tambahannya.

* + 1. **Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen Orde 1**

PDB ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut :



Dan rumus PU nya :



Dimana  diperoleh dari rumus :



Nilai  adalah akar karakteristik yang diperoleh dari persamaan karakteristik dengan menggunakan operator D

**Contoh 6.18 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Tak Homogen Orde 1  dengan syarat awal  tentukan PU dan PK nya

**Penyelesaian 6.18 :**

Diketahui PDB Linier Tak Homogen Orde 1 yaitu 

1. Menentukan nilai D

Untuk menentukan nilai digunakan metode operator D, dengan menjadikan PDB Linier Tak Homogen menjadi PDB Linier Homogen, yaitu

 ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

2. Menentukan 

Untuk menentukan nilai  diketahui  dan , diketahui rumus  adalah :

 ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

3. Menentukan PU

Karena nilai  dan  telah diketahui, yaitu dan , maka Penyelesaian Umum (PU) diketahui yaitu :

PU : 

4. Menentukan PK

Diketahui , jika dimasukan ke dalam PU , maka akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  jika dimasukan ke PU  akan diperoleh PK yaitu 

**Contoh 6.19 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Tak Homogen Orde 1  dengan syarat awal  tentukan PU dan PK nya

**Penyelesaian 6.19 :**

Diketahui PDB Linier Tak Homogen Orde 1 yaitu 

1. Menentukan nilai D

Untuk menentukan nilai digunakan metode operator D, dengan menjadikan PDB Linier Tak Homogen menjadi PDB Linier Homogen, yaitu

 ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

2. Menentukan 

Untuk menentukan nilai  diketahui  dan , diketahui rumus  adalah :

 ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

3. Menentukan PU

Karena nilai  dan  telah diketahui, yaitu dan , maka Penyelesaian Umum (PU) diketahui yaitu :

PU : 

4. Menentukan PK

Diketahui , jika dimasukan ke dalam PU , maka akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  jika dimasukan ke PU  akan diperoleh PK yaitu 

**Contoh 6.20 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Tak Homogen Orde 1  dengan syarat awal  tentukan PU dan PK nya

**Penyelesaian 6.20 :**

Diketahui PDB Linier Tak Homogen Orde 1 yaitu 

1. Menentukan nilai D

Untuk menentukan nilai digunakan metode operator D, dengan menjadikan PDB Linier Tak Homogen menjadi PDB Linier Homogen, yaitu

 ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  ⇒ 

2. Menentukan 

Untuk menentukan nilai  diketahui  dan , diketahui rumus  adalah :

 ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

3. Menentukan PU

Karena nilai  dan  telah diketahui, yaitu dan , maka Penyelesaian Umum (PU) diketahui yaitu :

PU : 

4. Menentukan PK

Diketahui , jika dimasukan ke dalam PU , maka akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  jika dimasukan ke PU  akan diperoleh PK yaitu 

* + 1. **Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen Orde 2**

PDB ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut :



Jika diselesaikan dengan metode operator D, dari PDB yang homogen, maka akan diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒, inilah yang disebut persamaan karakteristik karena persamaan karakteristik  merupakan persamaan kuadrat, maka jika diselesaikan dengan rumus ABC atau difaktorkan, maka akan diperoleh dua buah akar karakteristik, yaitu :

 dan  sehingga diperoleh dua buah akar karakteristik yaitu  dan 

Sehingga Penyelesaian Umum (PU) dari PDB  adalah :



Dimana  diperoleh dari rumus :





**Contoh 6.21 :**

Diketahui PDB Linier  dengan syarat awal  dan  tentukan PU, PP dan PK nya

**Penyelesaian 6.21 :**

Diketahui PDB , maka :

1. Menentukan Akar Karakteristik  dan dari PDB homogen

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

diperoleh akar karakteristik dan 

2. Menentukan 

Diketahui  dan maka  dapat ditentukan :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Untuk menentukan , diketahui  dan , diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

3. Menentukan PU

PU rumusnya adalah  sehingga PU dapat diketahui yaitu : 

4. Menentukan PP dan PK

Diketahui  ,  dan PU  jika syarat awal  dimasukan ke PU  akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒  ……… Pers(1)

Syarat awal  dimasukan ke turunan PU  akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒  ……… Pers(2)

Dari Pers(1) dan Pers(2) dilakukan eliminasi atau substitusi akan diperoleh :

 : 

 : 

 diperoleh nilai , jika  dimasukan ke PU , maka akan diperoleh PP yaitu 

jika  dimasukan ke dalam Pers(2) , maka akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoelh nilai , jika  dimasukan ke dalam PP , maka akan diperoleh PK yaitu 

**Contoh 6.22 :**

Misalkan diketahui PDB Linier Tak Homogen Orde 2  dengan syarat awal  dan  tentukan PU, PP dan PK nya

**Penyelesaian 6.22 :**

Diketahui PDB , maka :

1. Menentukan Akar Karakteristik  dan dari PDB homogen

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh akar karakteristik dan 

2. Menentukan 

Diketahui  dan  , maka  dapat ditentukan :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Untuk menentukan , diketahui  dan , diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

3. Menentukan PU

PU rumusnya adalah  sehingga PU dapat diketahui yaitu : 

atau 

4. Menentukan PP dan PK

Diketahui  ,  dan PU , jika syarat awal  dimasukan ke PU  akan diperoleh :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  …………….…… Pers(1)

Syarat awal  dimasukan ke turunan PU  akan diperoleh :

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  diperoleh nilai 

Jika  dimasukan ke dalam PU , maka akan diperoleh PP, yaitu : 

Jika  disubstitusikan ke Pers(1), maka akan diperoleh :

 ⇒ 

⇒ , jika nilai dimasukan ke PP yaitu  , maka akan diperoleh PK yaitu  atau 

* + 1. **Soal Soal Latihan**

Tentukan PU, PP dan PK dari PDB Linier Tak Homogen berikut ini

1.  dengan syarat awal  dan 

2.  dengan syarat awal  dan 

3.  dengan syarat awal  dan 

4.  dengan syarat awal  dan 

5.  dengan syarat awal  dan 

6.  dengan syarat awal  dan 

7.  dengan syarat awal  dan 

8.  dengan syarat awal  dan 

9.  dengan syarat awal  dan 

10.  dengan syarat awal  dan 

11.  dengan syarat awal  dan 

12.  dengan syarat awal  dan 

13.  dengan syarat awal  dan 

14.  dengan syarat awal  dan 

15.  dengan syarat awal  dan 

* 1. **Persamaan Diferensial Linier Koefisien Variabel Tak Homogen Orde 1**

Persamaan Diferensial Linier Koefisien Variabel Tak Homogen Orde 1 ini mempunyai bentuk umum yaitu :



Dimana yang disebut dengan koefisien variable adalah  merupakan fungsi dengan variable , jika  merupakan konstanta, maka persamaan diferensial linier yang terjadi adalah persamaan diferensial linier koefisien konstan seperti yang telah kita bahas sebelumnya.

Persamaan Diferensial Linier Koefisien Variabel yang mempunyai bentuk umum seperti di atas, akan mempunyai Penyelesaian Umum (PU) sebagai berikut :



Sebagai Catatan :





**Contoh 6.23 :**

Misalkan diketahui PDB  dengan syarat awal  tentukan PU dan PK nya

**Penyelesaian 6.23 :**

Diketahui PDB , sehingga didapat  dan  kemudian kita masukan ke dalam rumus PU yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  jadi PDB  mempunyai PU 

Untuk menentukan PK, maka syarat awal  kita masukan ke PU yaitu , diperoleh

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jika  kita masukan ke PU  maka akan diperoleh PK yaitu 

**Contoh 6.24 :**

Misalkan diketahui PDB  dengan syarat awal  tentukan PU dan PK nya

**Penyelesaian 6.24 :**

Diketahui PDB , sehingga didapat  dan  kemudian kita masukan ke dalam rumus PU yaitu :

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

jadi PDB  mempunyai PU 

Untuk menentukan PK, maka syarat awal  kita masukan ke PU yaitu , diperoleh

⇒  ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jika  kita masukan ke PU  maka akan diperoleh PK yaitu 

**6.5.1. Soal-Soal Latihan**

Tentukan PU dan PK dari PDB berikut

1.  dengan syarat awal 

2.  dengan syarat awal 

3.  dengan syarat awal 

4.  dengan syarat awal 

5.  dengan syarat awal 

* 1. **Memperoleh PDB dari Primitif atau Penyelesaian Umum (PU)**

Penyelesaian Umum (PU) dari sebuah Persamaan Diferensial Biasa (PDB) sering juga disebut *Primitif*. Jika pada pembahasan yang telah lalu yang diketahui adalah PDB nya, maka pada pembahasan kali ini yang diketahui adalah penyelesaian umum (PU) atau yang kita sebut dengan *primitif*, dari *primitif* tersebut kita dapat menentukan PDB nya.

Untuk menentukan sebuah Persamaan Diferensial Bias (PDB) dari *primitif* yang diketahui menggunakan metode Determinan orde nxn sama dengan nol (), dengan n diperoleh dari jumlah konstanta  dari sebuah *primitif*, sehingga jika dalam *primitif*  terdapat 1 (satu) buah konstanta , maka determinan yang digunakan untuk menentukan PDB nya orde 2 (dua), jika dalam *primitif*  terdapat 2 (dua) buah konstanta , maka determinan yang digunakan untuk menentukan PDB nya orde 3 (tiga) begitu seterusnya

Catatan :

Jika diketahui sebuah *primitif* , maka yang harus diperhatikan atau dilakukan adalah :

1. Berapa jumlah konstanta  yang terdapat didalam *primitive* tersebut

2. Turunkan *primitive* tersebut sampai turunan ke  dengan 

3. Pastikan PDB yang terbentuk homogen atau tidak homogen

**Contoh 6.25 :**

Misalkan diketahui *Primitif* berikut  tentukan PDB nya

**Penyelesaian 6.25 :**

1. *Primitif*  mempunyai 1 buah konstanta  sehingga determinannya berorde 2

2. *Primitif* diturunkan satu kali yaitu 

3. PDB yang akan diperoleh adalah PDB homogen, karena *Primitif*  tidak mengandung unsur yang terdapat konstanta 

sehiingga determinannya menjadi :

 ⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi *Primitif*  mempunyai bentuk PDB-nya adalah 

**Contoh 6.26 :**

Misalkan diketahui *Primitif* berikut  tentukan PDB nya

**Penyelesaian 6.26 :**

1. *Primitif*  mempunyai 1 buah konstanta  sehingga determinannya berorde 2

2. *Primitif*  diturunkan satu kali yaitu 

3. PDB yang akan diperoleh adalah PDB tidak homogen, karena *Primitif* mengandung Unsur  yang tidak mengandung konstanta 

Dari *primitif* dan turunan *primitif* diperoleh :

 ⇒ 

 ⇒ 

Sehingga determinanya diperoleh :

 ⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒  atau 

**Contoh 6.27 :**

Misalkan diketahui *Primitif* berikut  tentukan PDB nya

**Penyelesaian 6.27 :**

1. *Primitif*  mempunyai 1 buah konstanta  sehingga determinannya berorde 2

2. *Primitif*  diturunkan satu kali yaitu 

3. PDB yang akan diperoleh adalah PDB tidak homogen, karena *Primitif* mengandung Unsur  yang tidak mengandung konstanta 

Dari *primitif* dan turunan *primitif* diperoleh :

 ⇒ 

 ⇒ 

Sehingga determinanya diperoleh :



⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi *Primitif*  mempunyai PDB berbentuk 

**Contoh 6.28 :**

Misalkan diketahui *Primitif* berikut  tentukan PDB nya

**Penyelesaian 6.28 :**

1. *Primitif*  mempunyai 2 buah konstanta  yaitu  dan  sehinggadeterminannya berorde 3

2. *Primitif*  diturunkan dua kali yaitu  dan 

3. PDB yang akan diperoleh adalah PDB homogen, karena *Primitif*  tidak mengandung unsur yang tidak mengandung konstanta 

Dari *primitif* dan turunan *primitif* diperoleh :

 ⇒ 

 ⇒ 

 ⇒ 

Sehingga determinanya diperoleh :





⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi *Primitif*  mempunyai PDB berbentuk 

**Contoh 6.29 :**

Misalkan diketahui *Primitif* berikut  tentukan PDB nya

**Penyelesaian 6.29 :**

1. *Primitif* mempunyai 2 buah konstanta  yaitu  dan  sehingga determinannya berorde 3

2. *Primitif*  diturunkan dua kali yaitu :

Turunan ke 1 : 

Turunan ke 2 :  atau



3. PDB yang akan diperoleh adalah PDB homogen, karena *Primitif*  tidak mengandung unsur yang tidak mengandung konstanta 

Dari *primitif* dan turunan *primitif* diperoleh :

 ⇒ 

 ⇒ 

⇒

Sehingga determinanya diperoleh :





⇒ 



⇒ 



⇒ 



⇒ 

⇒ 

Jadi *Primitif*  mempunyai PDB berbentuk 

**Contoh 6.30 :**

Misalkan diketahui *Primitif* berikut  tentukan PDB nya

**Penyelesaian 6.30 :**

1. *Primitif*  mempunyai 2 buah konstanta  yaitu  dan  sehingga determinannya berorde 3

2. *Primitif*  diturunkan dua kali yaitu :

Turunan ke 1 : 

Turunan ke 2 : 

3. PDB yang akan diperoleh adalah PDB tidak homogen, karena *Primitif*  mengandung unsur yang tidak mengandung konstanta 

Dari *primitif* dan turunan *primitif* diperoleh :

 ⇒ 

 ⇒ 

 ⇒ 

Sehingga determinanya diperoleh :





⇒ 



⇒ 



⇒ 

⇒ 

⇒ 

Jadi *Primitif*  mempunyai PDB Linier Tak Homogen berbentuk 

**6.6.1. Soal-Soal Latihan**

Diketahui Penyelesaian Umum (PU) dari suatu PDB, tentukan PDB tersebut dari Penyelesaian Umum (PU) atau *Primitif* berikut ini :

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 